

TESTOVÁNÍ GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVIVOSTI V ROVINĚ

Jana Slezáková, Josef Molnár

Abstrakt

Článek se zabývá problematikou geometrické představivosti ve vztahu k testům inteligence. V rámci průzkumného šetření geometrické představivosti žáků ve věku 15–18 let byl vytvořen a vyhodnocen vlastní nestandardizovaný test, který testuje parciální a kombinační schopnosti žáků nad 15 let. Test sestává ze 40 úloh a v rámci jeho vyhodnocení bylo také provedeno srovnání úspěšnosti při řešení testu v závislosti na pohlaví a známce z matematiky.

Klíčová slova

Představivost, geometrická představivost, prostorová představivost, IQ testy, testy parciálních a kombinovaných schopností, nestandardizovaný test, Test čtverců, statistické vyhodnocovací metody.

Testing of the Geometric Imagination in a Plane

Abstract

The article deals with the geometric imagination in relation to intelligence tests. During an exploratory investigation of geometric imagination of pupils aged 15–18 years, a non-standardized test was created and evaluated, testing the partial and combining abilities of students over 15 years. The test consists of 40 tasks and its evaluation process also contains a comparison of the results based on gender and mathematics mark.

Key words

Imagination, geometric imagination, spatial imagination, intelligence tests, tests of partial and combined capabilities, non-standardized test, square test, statistical methods.

Žijeme a pracujeme v trojdimenzionálním prostoru, ale většina úloh, které se učíme řešit v geometrii, se realizuje v rovině (nejčastěji na listu papíru).

Problematika prostorové a geometrické představivosti je součástí našeho života, a to konkrétně při orientaci ve městě, v přírodě nebo při nakupování v obchodním domě, kdy se máme například vrátit zpět po stejné trase.

Moderní pedagogika zdůrazňuje, že je stále více zapotřebí umožnit žákům takové činnosti, které vychází z jejich vnitřní motivace a jsou (pokud je to možné) spojené s přímým poznáváním jevů a dějů.

Představivost, a s ní spjatý proces představování, je specifický jev, jehož vysvětlení je možné v komplexu vazeb a vztahů. Chápeme ji jako „základní psychickou funkci, jež zajišťuje možnost aktuálního psychického zpřítomnění jevů, jež nejsou de facto přítomny, a to jak ve smyslu rekonstruujícím, tj. ve smyslu nového vyvolání již známých podnětů z minulosti, tak ve smyslu konstruktivním, invenčním, tj. z hlediska tvorby originálních, pouze na představách založených de facto dosud neexistujících produktů. Představivost je vázána na ostatní psychické funkce a procesy a je integrovanou součástí systému psychiky“¹. V literatuře je představivost definována různými způsoby. Podle N. J. T. Thomase² je představivost to, co dělá naše smyslové prožitky srozumitelné. Umožňuje nám interpretaci prožitků, na jejichž základě můžeme přijmout tradiční závěry nebo sami vytvářet nové, originální a jedinečné.

H. Gardner (1999) definuje prostorovou představivost jako prostorovou inteligenci, jejímž jádrem jsou schopnosti, které zajišťují přesné vnímání vizuálního světa, umožňují transformovat a modifikovat původní vjemy a vytvářejí z vlastní zkušenosti myšlenkové představy, i když už žádné vnější podněty nepůsobí.

J. Molnár (2004) prostorovou představivost (potřebnou ve stereometrii) definuje jako soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru.

F. Dušek (1991) užívá pojem geometrická představivost, tj. věnuje se rozvoji představivosti s geometrickým obsahem. Je přesvědčen, že „pro žáka je důležité nejen to, aby si útvar dovedl představit, ale aby jej také dovedl v mysli analyzovat, přetvářet a doplňovat. Geometrickou představivost je možno rozvíjet hned od začátku vyučování geometrii, tedy už od planimetrie, protože i rovinný útvar si představujeme v nějaké rovině umístěné v prostoru.“

¹ PŮLPÁN, Z. a kol.. *O představivosti*, s. 22.

² <http://www.imagery-imagination.com>, 18. července 2008.

Není problém zjistit, jaké schopnosti a dovednosti se u žáků daného věku předpokládají, a na co tedy jednotlivé učební obory „navazují“. V praxi se však často ukazuje, že skutečný stav je velice vzdálen těmto představám. Dá se říci, že ani vyučovací předmět matematika pro své vlastní potřeby ne vždy dost pečlivě připravuje početní aparát a rozvíjí u dětí dostatečně potřebné představy.

V rámci přestavby školské matematiky často docházelo k výraznému odklonu od tradičních partií geometrie. „Ušetřený“ čas se věnoval modernějším, atraktivnějším částem matematiky, které byly a jsou lépe aplikovatelné v technické praxi. Omezování geometrických témat bylo zdůvodňováno jednak nedostatkem času, pracností a nepoužitelností tradiční geometrie. Z tohoto úhlu pohledu lze tyto připomínky vnímat jako opodstatněné, ovšem celkový přínos geometrie je natolik závažný, že ve vyváženém vzdělávacím systému by neměl být opomenut.

Podle M. Hejného (1990) se struktura školské geometrie dá chápat z různých hledisek. Z hlediska obsahového můžeme učivo rozložit na tři složky:

- **objekt**, kterého se studium týká – útvar (čtverec, těžiště), vztah (kolmost, shodnost), invariant (obsah, průměr), transformace (rovnoběžnost, skládání souměrností),
- **metoda**, kterou se pracuje – souřadnicová, vektorová, syntetická, početní,
- **prostor**, ve kterém se pohybujeme – jeho dimenze a jeho grupa (euklidovská, konformní apod.).

Z metodického hlediska můžeme školskou geometrii analyzovat přes činnosti, které žák vykonává, a přes zkušenosti, znalosti a schopnosti, které přitom získává. Co se týká činností, jedná se například o řešení konstrukčních úloh, experimentování, tvorbu a ověřování hypotéz, dokazování. V případě znalostí jsou to metody, věty a vzorce.

Z psychologického hlediska se učivo geometrie dá rozložit na složky podle psychických funkcí, a to: představivost, kombinační schopnosti, paměť, tvořivost, schopnost argumentace, schopnost abstrakce atd.

Jedním z cílů našich výzkumů, které jsme realizovali v posledních několika letech, bylo postihnout a popsat úroveň geometrické představivosti žáků gymnázií, poskytnout a ukázat vyučujícím matematiky jinou formu ověřování geometrických znalostí, a to pomocí nestandardizovaných testů.

Při studiu DSO Didaktika matematiky na PřF UP v Olomouci vytvořila hlavní autorka tohoto článku test na geometrickou představivost – „Test rovnostranných trojúhelníků“ (viz příloha), který vznikl na základě šetření, jež proběhlo jako součást řešení projektu ESF pod názvem „Vyhledávání talentů pro konkurenceschopnost a práce s nimi“, oblast podpory „Rovné příležitosti dětí a žáků, včetně dětí a žáků se speciálními vzdělávacími potřebami“, reg. číslo CZ.1.07/1.2.08/02.0017.

Test rovnostranných trojúhelníků vychází z Testu čtverců (IQ test parciálních a kombinovaných schopností),³ tzn. daný nepravidelný rovinný útvar jedním řezem (pouze v představách) máme rozdělit na dvě části tak, aby po složení obou částí vznikl rovnostranný trojúhelník.

Test byl připravován tak, aby byl:

- pro žáky zajímavý a vedl je ke zvýšení zájmu o geometrii,
- pro učitele ve výuce lehce aplikovatelný,
- použitelný pro věkovou kategorii 15–18 let.

Při tvorbě testu byla nejprve vytvořena síť z rovnostranných trojúhelníků a autorka vyhledávala různé nepravidelné útvary tak, aby po rozdělení na dvě části (pouze v představách a pouze jedním řezem) a složení vznikl rovnostranný trojúhelník. V první fázi vytvořila 40 rovinných útvarů, které byly po otestování na malém vzorku žáků dále dotvářeny. Takto vznikly dvě skupiny po 40 úlohách. První skupina úloh – Představivost 1 (TP1) je určena věkové kategorii do 15 let, druhá série úloh – Představivost 2 (TP2) je použitelná pro věkovou kategorii nad 15 let. V obou případech se jedná o nestandardizovaný test na geometrickou představivost, který je pro vyučující matematiky ve výuce lehce použitelný.

Úkolem výzkumného šetření, které bylo následně provedeno, bylo zjistit, zda známka z matematiky a výsledky v nestandardizovaném testu spolu souvisejí, zda existuje těsnost vztahu mezi výsledky chlapců a dívek a seřadit úlohy podle obtížnosti.

Testování proběhlo v červnu ve školním roce 2009/2010 a zúčastnilo se ho celkem 1 690 žáků gymnázií, z toho 548 žáků (234 chlapců a 314 dívek) nižšího gymnázia (sekunda, kvarta) a 1 142 žáků (421 chlapců a 721 dívek) vyššího gymnázia a odpovídající ročníky gymnázia čtyřletého (kvinta, sexta,

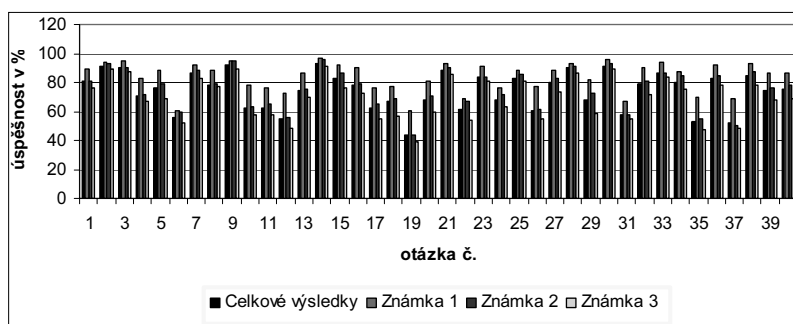
³ SVOBODA, M.: *Psychologická diagnostika dospělých*, Portál, s. r. o, Praha, 2005, str. 112.

1. ročník, 2. ročník). Jednalo se o fakultní gymnázia, která jsou vázána smlouvou o spolupráci s Přírodovědeckou fakultou UP Olomouc. V rámci výzkumu jsme se snažili o zjištění kvality našeho měření a o srovnání validity a reliability s hodnotami standardizovaného IQ testu – Test čtverců.

Dále uvádíme pouze výsledky šetření testu na představivost – TP2 pro věkovou kategorii nad 15 let.

Následující graf 1 a tabulka 1 ukazují souvislost mezi úspěšností v testu TP2 a známkou z matematiky.

Graf 1: Závislost úspěšnosti v testu TP2 na známce z matematiky



Následující tabulka uvádí průměrné bodové zisky jednotlivých skupin žáků podle známky z matematiky, a to včetně jejich průměrných bodových rozdílů v %.

Tab. 1

Otázka	Celkové výsledky	Znáмка 1	Znáмка 2	Znáмка 3	Rozdíl mezi 1 a 3	Rozdíl mezi 2 a 3	Rozdíl mezi 1 a 2
1	81	89,2	80,8	76,6	12,6	4,2	8,4
2	91,6	93,7	93,2	89,7	4	3,5	0,5
3	89,8	94,9	90,4	87,2	7,7	3,2	4,5
4	70,8	82,9	71,2	67,2	15,7	4	11,7
5	76	88,6	79,1	68,4	20,2	10,7	9,5
6	55,4	60,1	59,3	52,3	7,8	7	0,8
7	86,2	91,8	88,1	82,7	9,1	5,4	3,7
8	78,2	88,6	78,8	76,9	11,7	1,9	9,8

9	92,4	94,9	94,6	89,4	5,5	5,2	0,3
10	62,3	78,5	63,3	58,1	20,4	5,2	15,2
11	62,2	75,9	64,7	58,1	17,8	6,6	11,2
12	54,5	72,2	55,4	48	24,2	7,4	16,8
13	74,3	86,7	75,1	69,6	17,1	5,5	11,6
14	93,3	96,8	95,5	91,5	5,3	4	1,3
15	82,9	91,8	86,4	76,6	15,2	9,8	5,4
16	78,3	89,9	79,1	72,6	17,3	6,5	10,8
17	62,6	76,6	65,3	55,3	21,3	10	11,3
18	66,8	77,2	68,4	56,8	20,4	11,6	8,8
19	43,8	60,8	43,8	39,5	21,3	4,3	17
20	68	81	70,3	59,6	21,4	10,7	10,7
21	88,4	93	89,8	86	7	3,8	3,2
22	61,3	69	66,7	54,4	14,6	12,3	2,3
23	83,8	91,1	83,6	81,2	9,9	2,4	7,5
24	68	75,9	71,5	63,2	12,7	8,3	4,4
25	82,8	88	85,9	81,2	6,8	4,7	2,1
26	60,9	77,2	61,6	55	22,2	6,6	15,6
27	79,7	88,6	82,5	73,3	15,3	9,2	6,1
28	89,8	93	91,2	86,9	6,1	4,3	1,8
29	68,3	82,3	72,9	59	23,3	13,9	9,4
30	91	95,6	92,9	89,1	6,5	3,8	2,7
31	57,4	67,1	57,6	55,3	11,8	2,3	9,5
32	78,8	89,9	80,5	72	17,9	8,5	9,4
33	86,1	94,3	86,4	83,3	11	3,1	7,9
34	80	87,3	84,2	75,1	12,2	9,1	3,1
35	53,4	69,6	54,8	47,7	21,9	7,1	14,8
36	82,7	91,8	84,2	77,8	14	6,4	7,6
37	52,1	69	50	48,3	20,7	1,7	19
38	84,4	93	87,3	78,4	14,6	8,9	5,7
39	74,6	86,7	76	67,8	18,9	8,2	10,7
40	75,2	86,1	78,2	68,4	17,7	9,8	7,9
					14,5275	6,5275	8

Z grafu a tabulky je zřejmé, že „jedničkáři“ mají jednoznačně lepší výsledky než „dvojkaři“ a „trojkaři“. Zajímavým výsledkem je fakt, že ani v jedné úloze nebyli „jedničkáři“ horší než „dvojkaři“ nebo „trojkaři“, což se nepotvrdilo v případě šetření u žáků nižšího gymnázia. I další šetření (Slezáková

2010) prokázala souvislost mezi úspěšností při řešení testu TP2 a známkou z matematiky.

Pokusili jsme se také o znázornění pořadí jednotlivých úloh v testu TP2 s jejich následným vyhodnocením podle počtu správných odpovědí, a to s cílem zjistit, jak obtížné byly tyto úlohy pro jednotlivé skupiny, a tedy jakým způsobem by podle nich měly být seřazeny.

V tabulce 2 jsou uvedeny průměrné bodové zisky všech 1 142 žáků u jednotlivých úloh v testu TP2.

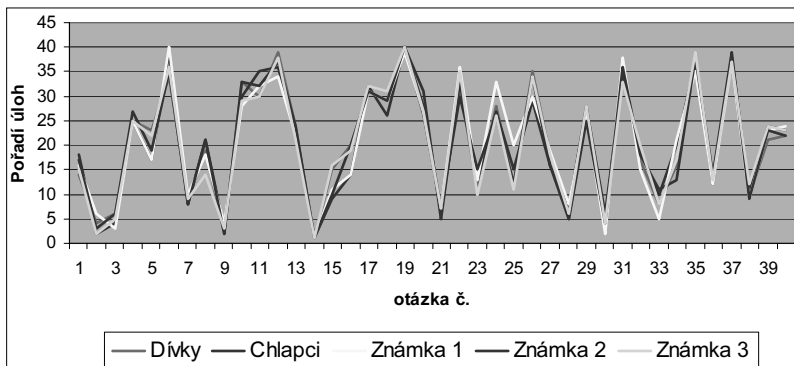
Tab. 2

TP2 (1 142)	Vyřešili:	správně		chybně		Neřešili	
	n	n	%	n	%	n	%
u1	1 119	925	81,0	194	17,0	23	2,0
u2	1 068	1 046	91,6	22	1,9	74	6,5
u3	1 089	1 025	89,8	64	5,6	53	4,6
u4	980	809	70,8	171	15,0	162	14,2
u5	1 088	868	76,0	220	19,3	54	4,7
u6	1 091	633	55,4	458	40,1	51	4,5
u7	1 040	984	86,2	56	4,9	102	8,9
u8	1 009	893	78,2	116	10,2	133	11,6
u9	1 092	1 055	92,4	37	3,2	50	4,4
u10	900	711	62,3	189	16,5	242	21,2
u11	828	710	62,2	118	10,3	314	27,5
u12	754	622	54,5	132	11,6	388	34,0
u13	975	848	74,3	127	11,1	167	14,6
u14	1 104	1 065	93,3	39	3,4	38	3,3
u15	1 037	947	82,9	90	7,9	105	9,2
u16	1 069	894	78,3	175	15,3	73	6,4
u17	849	715	62,6	134	11,7	293	25,7
u18	945	763	66,8	182	15,9	197	17,3
u19	696	500	43,8	196	17,2	446	39,1
u20	997	776	68,0	221	19,4	145	12,7
u21	1 073	1 010	88,4	63	5,5	69	6,0
u22	799	700	61,3	99	8,7	343	30,0
u23	1 023	957	83,8	66	5,8	119	10,4
u24	881	776	68,0	105	9,2	261	22,9
u25	1 051	946	82,8	105	9,2	91	8,0

u26	912	695	60,9	217	19,0	230	20,1
u27	991	910	79,7	81	7,1	151	13,2
u28	1058	1025	89,8	33	2,9	84	7,4
u29	910	780	68,3	130	11,4	232	20,3
u30	1065	1039	91,0	26	2,3	77	6,7
u31	953	655	57,4	298	26,1	189	16,5
u32	963	900	78,8	63	5,5	179	15,7
u33	1027	983	86,1	44	3,9	115	10,1
u34	977	914	80,0	63	5,5	165	14,4
u35	821	610	53,4	211	18,5	321	28,1
u36	1013	944	82,7	69	6,0	129	11,3
u37	713	595	52,1	118	10,3	429	37,6
u38	1032	964	84,4	68	6,0	110	9,6
u39	905	852	74,6	53	4,6	237	20,8
u40	953	859	75,2	94	8,2	189	16,5

Grafem 2 jsme se snažili vyjádřit, jakým způsobem by měly být seřazeny jednotlivé úlohy testu na základě výsledků, které jsme získali od jednotlivých zkoumaných skupin, tedy zvlášť u dívek, chlapců, žáků „jedničkářů“, „dvojkařů“ a „trojkařů“.

Graf 2: Pořadí úloh podle počtu správných odpovědí v testu TP2

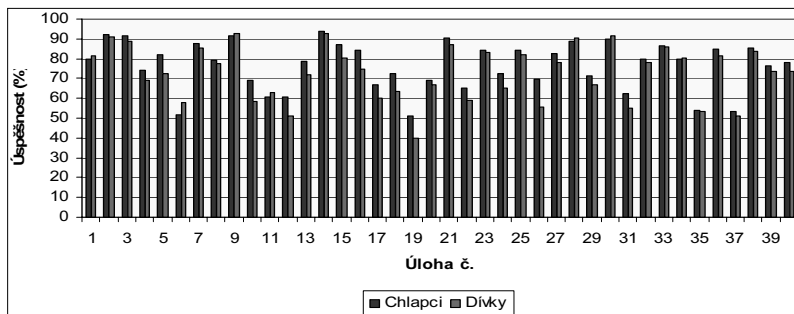


Z našeho šetření vyplývá, že pokud budeme úlohy řadit podle stoupající obtížnosti, budou seřazeny takto: Úloha č. 14, 9, 2, 30, 3, 28, 21, 7, 33, 38,

23, 15, 25, 36, 1, 34, 27, 32, 16, 8, 5, 40, 39, 13, 4, 29, 20, 24, 18, 17, 10, 11, 22, 26, 31, 6, 12, 35, 37, 19.

Následující graf 3 znázorňuje závislost výsledků testu na pohlaví řešitelů..

Graf 3: Závislost mezi výsledky chlapců a dívek vyššího gymnázia v testu TP2



Ve výsledcích provedeného šetření (průměrných bodových zisků chlapců a dívek) žáků vyššího gymnázia je patrný rozdíl mezi výsledky chlapců a dívek. Pouze v sedmi úlohách byly dívky úspěšnější než chlapci.. Jednalo se o úlohy č. 1, 6, 9, 11, 28, 30 a 34. U úlohy č. 28 byl největší celkový průměrný bodový rozdíl, a to 11,5 % ve prospěch dívek. I z dalších šetření (Slezáková 2010) plyne, že existuje závislost mezi úspěšností při řešení testu TP2 a pohlavím řešitelů.

Dalším z cílů, které jsme si při tvorbě testu stanovili, bylo zjistit kvalitu našeho měření a srovnat platnost a spolehlivost (přesnost) s hodnotami standardizovaného IQ testu – Test čtverců. V následujících tabulkách jsou uvedeny hodnoty **reliability** a **validity** měření.

V případě reliability našeho testu byla použita procedura programu SPSS, která zjišťuje hodnotu Cronbachova alfa a také koeficient pro metodu půlení (half-split-method), Validita byla ověřovaná pomocí korelačního vztahu vzhledem ke známce z matematiky.

K vystižení vzájemných vztahů mezi testy je použit Spearmanův koeficient korelace, který umožňuje stanovit kvantitativně, jak těsná je souvislost mezi jevy, na základě nichž byla pořadí vytvořena.

Tab. 3: Hodnoty reliability metodou půlení v testu TP2

Reliability Statistics			
Cronbach's Alpha	Part 1	Value	,831
		N of Items	20(a)
	Part 2	Value	,840
		N of Items	20(b)
	Total N of Items		
Correlation Between Forms			,727
Spearman-Brown Coefficient	Equal Length		,842
	Unequal Length		,842
Guttman Split-Half Coefficient			,837

- a) The items are: u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7, u8, u9, u10, u11, u12, u13, u14, u15, u16, u17, u18, u19, u20.
- b) The items are: u21, u22, u23, u24, u25, u26, u27, u28, u29, u30, u31, u32, u33, u34, u35, u36, u37, u38, u39, u40.

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	324	28,4
	Excluded(a)	818	71,6
Total		1142	100,0

- a) Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,902	40

Uvedené tabulky ukazují vysoký stupeň reliability testu TP2, zjištěná hodnota je vyšší než reliabilita IQ testu – Testu čtverců. (Čím je hodnota reliability vyšší, tj. blíží se k +1, tím je vyšší stupeň přesnosti měření.) Pro TP2 je reliabilita $r = 0,837$, pro IQ test – Test čtverců je reliabilita $r = 0,812$ (Svoboda, 2005).

Pro posouzení exaktní validity bylo jako vnější kritérium zvolena známka z matematiky. Použita byla predikční validitu stejně jako v případě Testu čtverců.

Tab. 4: Hodnoty predikční validity v případě testu TP2

	Korelace (výzkum 1d) Označ. korelace jsou významné na hlad. $p < ,05000$ Shrnout podmínku: TP = „TP2“ and výzkum = „JS“		
Proměnná	známka	body	správně %
známka	1,0000 N = 973 p = -	-,2162 N = 973 p = ,000	-,1981 N = 973 p = ,000
body	-,2162 N = 973 p = ,000	1,0000 N = 1142 p = -	,7823 N = 1142 p = 0,00
správně %	-,1981 N = 973 p = ,000	,7823 N = 1142 p = 0,00	1,0000 N = 1142 p = -

Na základě získaných a uvedených výsledků můžeme konstatovat, že naše měření na hladině významnosti 0,05 lze považovat za validní.

Lze tedy konstatovat, že didaktický test TP2 je vhodný k ověřování úrovně geometrické představivosti žáků vyšších gymnázií.

Literatura

- AMTHAUER, R. a kol.: *Test struktury inteligence I-S-T 2000 R*. Praha: Test-centrum, 2005.
- DUŠEK, F.: *Rozvoj prostorové představivosti*. Matematika ve škole, r. XIV (1964) č. 6, s. 313–318.
- GARDNER, H.: *Dimenze myšlení - teorie rozmanitých inteligencí*. Praha: Portál, 1999.
- HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990.
- KUŘINA, F.: *Poznááme prostor*. Praha: PedF UK, 1995.
- MOLNÁR, J.: *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Olomouc: VUP, 2004.
- PŮLPÁN, Z. a kol.: *O představivosti a její roli v matematice*. Praha: Academia, 1992.
- SLEZÁKOVÁ, J.: Geometrical imagination in a plane. In: *Studentská vědecká soutěž „O cenu děkana 2010“*. Olomouc: PřF UP, 2010.
- SVOBODA, M.: *Psychologická diagnostika dospělých*. Praha: Portál, 2005.

THOMAS, N. J. T.: *Imagination, Mental Imagery, Consciousness, and Cognition: Scientific, Philosophical and Historical Approaches* [cit. 18. července 2008].
Dostupné z WWW: <<http://www.imagery-imagination.com> >.

Kontaktní adresa

RNDr. Jana Slezáková
Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
17. listopadu 12
771 46 Olomouc
tel. +420 732 817 300
slezakova@sgo.cz

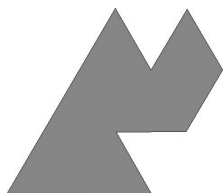
Doc. RNDr. Josef Molnár, CSc.
Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
17. listopadu 12
771 46 Olomouc
tel. +420 585 634 641
molnar@prfnw.upol.cz

*Článek byl zpracován v rámci řešení projektu ESF OP VK CZ.1.07/1.2.08/02.0017
„Vyhledávání talentů pro konkurenceschopnost a práci s nimi“.*

Příloha
Test TP2

Mnohoúhelník jedním řezem rozdělíte tak, aby po přemístění jedné části ke druhé (pouze v představách) vznikl rovnostranný trojúhelník.

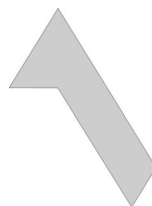
1.



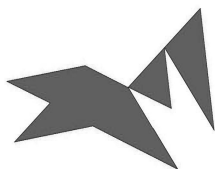
2.



3.



4.



5.



6.



7.



8.



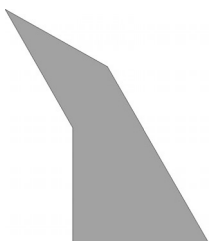
9.



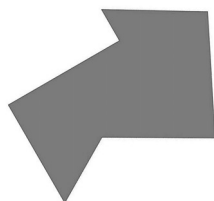
10.



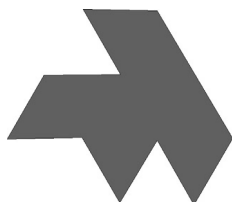
11.



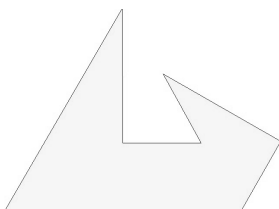
12.



13.



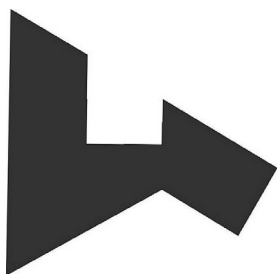
14.



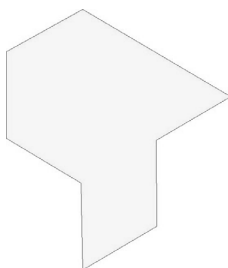
15.



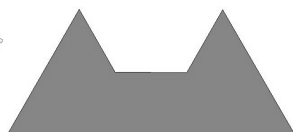
16.



17.



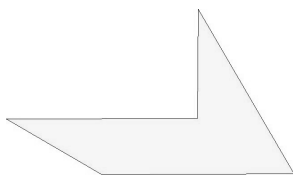
18.



19.



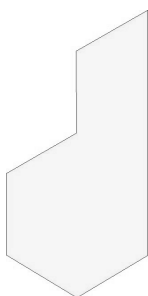
20.



21.



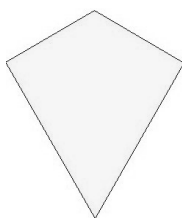
22.



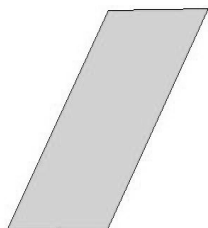
23.



24.



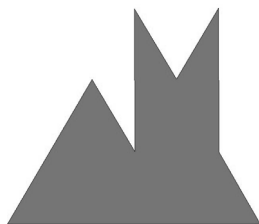
25.



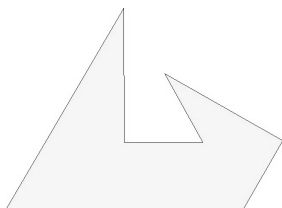
26.



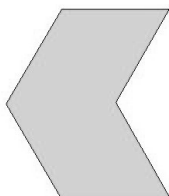
27.



28.



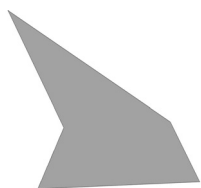
29.



30.



31



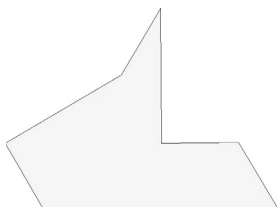
32.



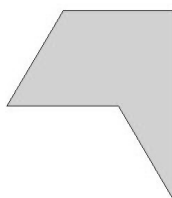
33.



34.



35.



36.



37.



38.



39.



40.

